ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2010. október 19.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II.B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$A \cap B = \{a; b; d\}$,	1 pont	*Csak hibátlan válaszokért adható pont.*
$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A társaság 12 tagú.	1 pont	
132 SMS-t írtak összesen.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Helyes végeredmény közlése 2 pontot ér.*

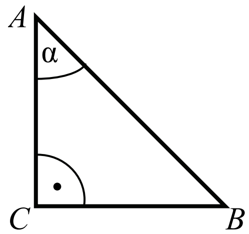
3.		
$a = -2$	1 pont	
$b = \frac{1}{2}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
A kifejezés $x > -3{,}5$ esetén értelmezhető.	2 pont	*Ha egyenlőséget is megenged, vagy rosszul rendez x-re, legfeljebb 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$a > 1$	2 pont	*Az $a \geq 1$ válasz 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Az egyenlet megoldásai az A halmaz elemei közül: -1 és 0.	2 pont	*Helyes válaszonként 1-1 pont. Minden hibás válasszal 1 pontot veszít. (Természetesen nem lehet negatív a pontszám.)*
Összesen:	**2 pont**	

7.



(A szögfüggvények definíciója miatt) $BC = \sin\alpha$,	1 pont	$AC = \cos\alpha$ *(def. alapján)*
$AC=BC$,	1 pont	$\cos\alpha = \sin\alpha$
tehát $\alpha = 45°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.

I. hamis;	1 pont	
II. igaz;	1 pont	
III. igaz;	1 pont	
IV. hamis.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9.

$b = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ vagy $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$	2 pont	*Ha egy azonosságot hibásan használ, 1 pontot kaphat, egynél több hiba esetén nem jár pont.*
Összesen:	**2 pont**	

10.

Jól megadott képlet,	2 pont	*A csak grafikonnal ábrázolt függvény 0 pont.*
a maximumhely jó megadása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

11.

Egy megfelelő gráf megrajzolása.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

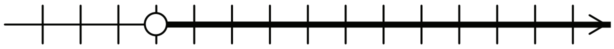
12.

A középpont a húr felező merőlegesén van,	1 pont	*A feltételek ábrán való jó megjelenítése is elfogadható indoklás.*
így az első koordinátája 4.	1 pont	
A középpont: $O(4; 4)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

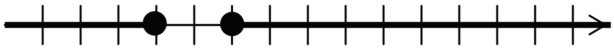
Az u = v megállapítása: 1 pont;
az $(1-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ *és a* $(7-u)^2 + (-u)^2 = r^2$ *egyenletek felírása 1 pont;*
az egyenletrendszerből az u=4 és az O(4; 4) megadása 1 pont.

II/A.

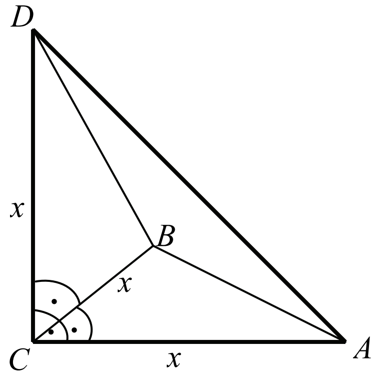
13. a)

$12x-6\cdot(x-1)>3\cdot(x-3)-4\cdot(x-2)$	1 pont	
$12x-6x+6>3x-9-4x+8$	1 pont	
$6x+6>-x-1$	1 pont	
$7x>-7$ azaz $x>-1$	1 pont	
 0 1	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)

$-3x^2\le -3$	1 pont	
$x^2\ge 1$	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekre teljesül) $x\ge 1$,	1 pont	
vagy $x\le -1$.	1 pont	
 0 1	2 pont	*Csak akkor jár az 1-1 pont, ha a megoldásban a végpontok is jók.*
Összesen:	**7 pont**	

14. a)



2,88 dl = 288 cm^3.	1 pont	
A tetraéder (gúla) alapterülete $T_a = \frac{x^2}{2}$ (ekkor a magassága x),	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha más meggondolással helyesen írja fel a gúla térfogatát.*
a térfogata $V = \frac{x^3}{6}$.	1 pont	
$288 = \frac{x^3}{6}$, melyből	1 pont	
$x^3 = 1728$; $x = 12$.	1 pont	
Az *ABD* háromszög mindegyik oldala egyenlő,	1 pont	
hosszuk $x \cdot \sqrt{2} \approx 16{,}97 \approx 17\,cm$.	1 pont	
A tetraéder (gúla) élei 12 cm, illetve 17 cm hosszúak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	*A mértékegység rossz átváltásából származó hibás eredmény esetén maximum 6 pont adható.*

14. b)

Az egybevágó derékszögű háromszögek területe: $T_1 = \frac{144}{2} = 72$ (cm^2).	1 pont	
A negyedik lap területe $T_2 = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$	1 pont	
$\approx 124{,}7$ (cm^2).	1 pont	
A papírdoboz felszíne $A = 3T_1 + T_2 = 340{,}7 \approx 341$ cm^2.	1 pont	*Ha a 17 cm-es oldallal számol, $T_2 = 125{,}1$ cm^2, a felszín $A \approx 341$ cm^2.*
Összesen:	**4 pont**	

15. a) **első megoldás**		
(A kettős dobások minden kimenetele egyenlően valószínű, tehát alkalmazható a klasszikus modell.) Összesen $6^2 = 36$-féle kettős dobás történhet.	2 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is jár a 2 pont.*
Az első dobás 2-féle, a második 4-féle lehet,	1 pont	
tehát $2 \cdot 4 = 8$ „jó” kettős dobás van,	1 pont	
így $\frac{8}{36}\left(=\frac{2}{9}\approx 0{,}22\right)$ annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kaptuk.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. a) **második megoldás**		
(Az első és második dobás függetlenek.)		
Az első dobással $\frac{2}{6}$ valószínűséggel szerez pontot a játékos,	1 pont	
a másodiknál $\frac{4}{6}$ valószínűséggel nem kap pontot.	1 pont	
A keresett valószínüség $\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$	2 pont	
azaz $\frac{8}{36}=\left(\frac{2}{9}=0{,}22...\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)		
Pontosan 1 pontot akkor szerezhetünk, ha az első dobás jó (pontot érő), a második nem pontot érő, vagy fordítva,	2 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.*
ez összesen $2\cdot 2\cdot 4 = 16$ eset.	1 pont	
2 pontot szerezhetünk $2\cdot 2 = 4$ esetben.	1 pont	
Így annak a valószínűsége, hogy egy menetben szerzünk pontot: $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.	1 pont	*A lehetséges 36 esetből 20 esetben szerzünk pontot,*
Annak, hogy nem szerzünk pontot, $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ a valószínűsége,	1 pont	*16 esetben nem szerzünk pontot.*
tehát az első eseménynek nagyobb a valószínűsége.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

15. a) és b) **másik megoldási módszer**

A táblázat **első sora az első dobás**, **első oszlopa a második dobás** lehetséges kimeneteleit mutatja. A mezőkbe a **menet** során elért pontszámok kerültek. 36 egyenlően valószínű eset van, használható a kombinatorikus modell.

	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
4	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
6	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

A táblázat helyes kitöltése.	6 pont	
az a) eseménynek megfelelő mezőket mutatja: $\frac{8}{36}$ a keresett valószínűség.	2 pont	
b) Nem szerzünk pontot (mezők) valószínűsége $\frac{16}{36}$. Ez kisebb mint $\frac{1}{2}$, ezért annak nagyobb a valószínűsége, hogy szerzünk pontot.	4 pont	
Összesen:	**12 pont**	

II/B.

16. a)		
$a_8 = a_1 + 7d$, ahol d a sorozat differenciája. $14 = -7 + 7d$	1 pont	
$d = 3$.	1 pont	
$660 \geq S_n$	1 pont	*Ha nem egyenlőtlenséget ír föl (illetve nem azzal számol), de indokolja, hogy a 24-nél nem nagyobb pozitív egész számok a feladat megoldásai, akkor megkapja a 7 pontot.*
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n = \frac{-14 + 3\cdot(n-1)}{2}\cdot n$	1 pont	
$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség bal oldalához kapcsolható másodfokú függvénynek minimuma van (a=3>0, vagy grafikonra hivatkozás stb.),	1 pont	
zérushelyei: 24 és $-\frac{55}{3}$ (ami negatív).	1 pont	
$\left(-\frac{55}{3} < 0 <\right) n \leq 24$	1 pont	
Mivel a feladatunkban n pozitív egész, n lehetséges értékei: 1, 2, …, 23, 24.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
Az S_1, S_2, …, S_{24}, S_{25} megvizsgálása alapján kapott helyes válasz is teljes értékű. Ha S_{25} vizsgálata, vagy a monotonitásra való hivatkozás elmarad, 7 pontot kap. Ha csak egyenlőséggel dolgozik és n=24-et ad megoldásnak, 4 pontot kap.		

16. b)		
$a_4 = a_1 \cdot q^3$, ahol q a sorozat hányadosa. $-189 = -7\cdot q^3$	1 pont	
$q = 3$.	1 pont	
$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = -7\cdot\frac{3^n - 1}{2}$	1 pont	
$-68887 = -7\cdot\frac{3^n - 1}{2}$	1 pont	
$3^n = 19\,683$	2 pont	
Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton),	1 pont	*Egyéb helyes indoklás is elfogadható.*
$n = 9$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. a)		
Az a oldalú szabályos háromszög területe: $t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}7\ (\mathrm{cm}^2)$.	1 pont	
A szabályos háromszög feletti tartomány egy a sugarú kör 60º-os középponti szögéhez tartozó körszelet,	1 pont	
amelynek területe: $t_2 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}6\ (\mathrm{cm}^2)$.	1 pont	
A legfelső „holdacska” területét úgy kapjuk, hogy az $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a körszelet területét.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár az 1 pont.*
$t_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - t_2 = \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =.$	1 pont	
$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1{,}9\ (\mathrm{cm}^2)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b) első megoldás		
Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a „holdacska” színe négyféle lehet,	1 pont	
a körszelet színe (1) miatt már csak háromféle,	1 pont	
a szabályos háromszög színe pedig szintén háromféle, hiszen csak a körszelet színével nem lehet azonos.	1 pont	
Az (1) feltételnek megfelelő színezések száma tehát $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.	1 pont	
Ebből a 36 esetből kell elvennünk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül.	1 pont	
Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezünk, és piros tartomány van sárga mellett $4 \cdot 2 = 8$,	2 pont	
ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet.	1 pont	
Olyan kifestés, ahol csak a piros és sárga színeket használnánk, kétféle lehet.	2 pont	
Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36 - (8 + 2) = 26$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

17. b) második megoldás		
Ha a piros és a sárga színt is felhasználjuk a kifestéshez, akkor ezek a színek csak a „holdacska” és a szabályos háromszög festésére alkalmazhatók (2) miatt,	1 pont	*Indoklás nélküli jó válaszért 1 pont jár.*
a körszelet pedig lehet zöld vagy kék. Ekkor $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség van.	1 pont	
Ha a piros színt nem használjuk a kifestéshez, akkor két eset van: 1. A fennmaradó három szín mindegyikét használjuk. Ekkor a lehetőségek száma: $3! = 6$.	1 pont	
2. A maradék három színből csak kettőt használunk. Ezt a két színt háromféleképpen tudjuk kiválasztani,	1 pont	
és (1) miatt a kiválasztott két szín felhasználásával kétféle kitűző készíthető.	1 pont	*Indoklás nélküli jó válaszért 1 pont jár.*
Így ebben az esetben a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 = 6$.	1 pont	
Az olyan kifestések száma tehát, amelyekben a piros szín nem szerepel: $6 + 6 = 12$.	1 pont	
A sárga színt nem használó kifestési lehetőségek száma is 12.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe a kétszer számolt eseteket, akkor ebből a 4 pontból csak 3 pontot kapjon.*
Ezek között két olyan kifestés van, amelyben sem a piros, sem a sárga színt nem használjuk.	1 pont	
Ezt a 2 esetet már az előzőekben beszámítottuk, így a már összeszámoltaktól különböző, a sárga színt nem használó kifestések száma 10.	1 pont	
A feltételeknek megfelelő összes kifestési lehetőségek száma: $4 + 12 + 10 = 26$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

17. b) **harmadik megoldás**		
Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a négy színből pontosan három szín felhasználásával $4\cdot 3\cdot 2=24$ kifestés lehetséges.	2 pont	
A négy színből pontosan két szín felhasználásával és csak az (1) feltétel figyelembe vételével a lehetséges kifestések száma: $\binom{4}{2}\cdot 2=12$.	2 pont	
Az összesen 36 esetből kell elvennünk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül.	1 pont	
Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezünk, és piros tartomány van sárga mellett $4\cdot 2=8$,	2 pont	
ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet.	1 pont	
Olyan kifestés, ahol csak a piros és sárga színeket használnánk, kétféle lehet.	2 pont	
Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36-(8+2)=26$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

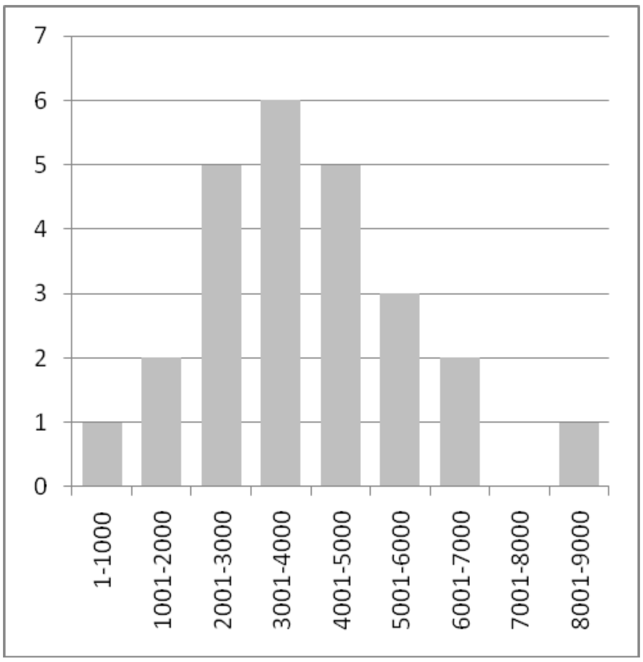
Megjegyzés: Ha a megoldást konkrét esetek felsorolásával keresi:

- *az összes eset rendszerezett felsorolása 11 pont;*
- *ha a vizsgázó valamilyen módon megadja mind a 26 lehetséges színezést, de nem olvasható ki belőle, hogy további lehetőségek nincsenek, legfeljebb 9 pontot kaphat;*
- *ha elhagyja valamelyik feltételt, legfeljebb 3 pont;*
- *csupa jó esetet sorol fel, de nem az összes lehetőséget, legfeljebb 5 pont adható.*

18. a)		
A 25 elemű mintában az elemek összege 101 400.	1 pont	
Így az átlag $\frac{101\,400}{25} =$	1 pont	
$= 4056\,(\text{Ft})$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. b)		
Az 1000 Ft-os osztályokba sorolt adatok gyakorisági táblázata:	3 pont	*1 vagy 2 hibás adat esetén 2 pont jár,* *3-4 hibás adatért 1 pont jár,* *4-nél több hiba esetén nem jár pont.*

Havi költség Ft-ban	Családok száma
1-1000	1
1001-2000	2
2001-3000	5
3001-4000	6
4001-5000	5
5001-6000	3
6001-7000	2
7001-8000	0
8001-9000	1



(diagram)	2 pont	*A tengelyek felcseré-lésével készített helyes diagram is teljes értékű.* *Hibás adatokat is tartalmazó adatsorból készített jó diagramért (jók a tengelyek, azokon jók az egységek) jár a 2 pont.*
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
A két szélső adat elhagyásával az új átlag: $\frac{91\,900}{23} \approx$	1 pont	
$\approx 3996(\text{Ft})$.	1 pont	
Mivel $\frac{3996}{4056} \approx 0{,}9852$,	1 pont	
ezért az átlag $\approx 1{,}48\%$-kal csökkent.	1 pont	*1,49% is elfogadható.*
Az új adatsor legkisebb eleme 1200 Ft, legnagyobb eleme 6800 Ft,	1 pont	
így terjedelme 5600 Ft.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. d)		
Az új átlag $\frac{25\cdot 4056+(4056-1000)+(4056+1000)}{27} =$	2 pont	*Helyes számláló 1 pont, helyes nevező 1 pont.*
$= \frac{27\cdot 4056}{27} = 4056$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	