

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2009. október 20.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részsámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

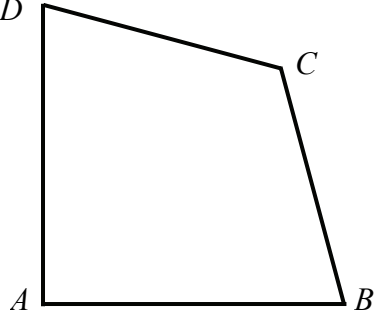
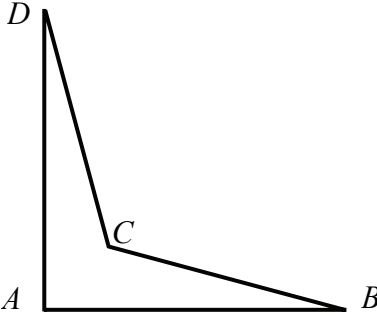
I.

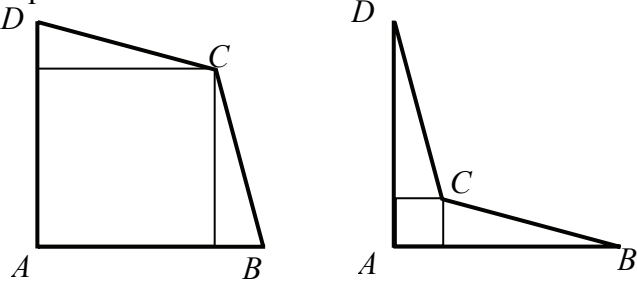
1. a)		
Az $0,5^{2-\log_{0,5} x} = 3$ egyenletben a hatványozás megfelelő azonosságát alkalmazva, az $\frac{0,5^2}{0,5^{\log_{0,5} x}} = 3$ egyenlethez jutunk.	1 pont	
Innen (a logaritmus definíciója szerint) a $\frac{0,5^2}{x} = 3$ egyenlet adódik.	2 pont	
Ebből $x = \frac{1}{12}$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

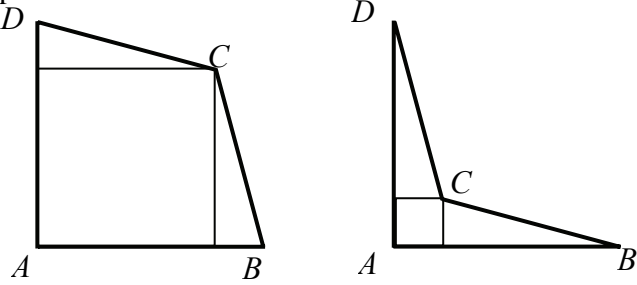
1. b)		
Mivel $\log_x \frac{1}{2} = \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 x} = -\frac{1}{\log_2 x}$,	1 pont	
így a megoldandó egyenlet: $7 - \frac{6}{\log_2 x} = \log_2 x$.	1 pont	
Mindkét oldalt $\log_2 x$ -szel szorozva, és az egyenletet nullára redukálva: $\log_2^2 x - 7 \log_2 x + 6 = 0$.	1 pont	
A $\log_2 x$ -re másodfokú egyenlet megoldásai: $\log_2 x = 6$ vagy $\log_2 x = 1$.	1 pont	
$x = 64$ vagy $x = 2$.	1 pont	
Mivel $1 < x \leq 2$, a 64 nem megoldás.	1 pont	
A megadott halmazon az egyenletnek egy megoldása van, a 2.	1 pont	<i>Ha az alaphalmazt nem veszi figyelembe, akkor 1 pontot veszít.</i>
Összesen:	7 pont	

2. a) első megoldás		
Jelöljük az $ABCD$ négyszög derékszögű csúcsát A -val, és legyen a $BCD\angle = 120^\circ$. Ekkor $AB = AD = 20$. Pitagorasz tételét alkalmazva az ABD derékszögű háromszögre, $BD = 20\sqrt{2}$.	1 pont	
A BCD háromszög BD oldalára alkalmazva a koszinusztételt ($BC = CD = b$ jelölés mellett), $800 = 2b^2 - 2b^2 \cos 120^\circ$.	1 pont	
$800 = 2b^2 + b^2$. A $3b^2 = 800$ egyenlet egyetlen pozitív megoldása: $b = \sqrt{\frac{800}{3}}$ ($\approx 16,33$ m).	1 pont	
Tehát a kerítés hossza: $40 + 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \approx 72,7$ (m).	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. a) második megoldás		
$BD = 20\sqrt{2}$	1 pont	
A BDC egyenlő szárú háromszögben a $BDC\angle = 30^\circ$. A háromszög C csúcsából húzott magasság felezi a DB alapot (Jelölje F a DB oldal felezőpontját.). A DFC derékszögű háromszögben $\cos 30^\circ = \frac{DF}{DC}$.	1 pont	
Így $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{b}$, azaz $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
Tehát a kerítés hossza: $40 + \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 72,7$ (m).	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. b)		
<p>István konvex négyszög alakú telket látott.</p> 	1 pont	
<p>Péter konkáv négyszögre gondolt.</p> 	1 pont	
Összesen:	2 pont	<p><i>A pont a konvex, illetve konkáv négyszög rajzolásáért jár. Ne vonjunk le pontot, ha egyéb feltételeknek (pl. két-két oldala nem egyenlő) nem tesz eleget a vizsgázó rajza.</i></p>

2. c) első megoldás		
<p>A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet A-val szembeni csúcsa a C pont.</p>  <p>Az $ABCD$ négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre.</p>	<p>2 pont</p>	<p><i>Ezt a megállapítást indoklás nélkül el kell fogadni. Ha csak a vizsgázó ábráján jelenik meg ez a gondolat, akkor is jár a pont.</i> <i>A lehető legnagyobb négyzetek megtalálása 1-1 pont.</i></p>
<p>Jelölje T a C csúcsból húzott, AD oldalra merőleges egyenesnek és az AD oldalnak a metszéspontját. Ekkor TC a keresett négyzet oldala.</p> <p>István konvex négyszögében $\angle TCD = 15^\circ$.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>A TCD derékszögű háromszögben: $\cos 15^\circ = \frac{CT}{b}$.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Mivel $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, így</p> $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15^\circ \approx 15,77 \text{ (m)}.$ <p>Ekkor a ház alapterülete: kb. 249 m^2 lenne.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Péter konkáv négyszöge esetében $\angle TCD = 75^\circ$.</p> <p>Mivel ekkor $\cos 75^\circ = \frac{CT}{b}$,</p>	<p>1 pont</p>	
<p>így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 75^\circ \approx 4,23 \text{ (m)}$.</p> <p>Ekkor a ház alapterülete: kb. 18 m^2 lenne.</p>	<p>1 pont</p>	
<p style="text-align: right;">Összesen:</p>	<p>7 pont</p>	

2. c) második megoldás		
<p>A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet A-val szembeni csúcsa a C pont.</p>  <p>Az $ABCD$ négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre.</p>	<p>2 pont</p>	<p><i>Ezt a megállapítást indoklás nélkül el kell fogadni. Ha csak a vizsgázó ábráján jelenik meg ez a gondolat, akkor is jár a pont.</i></p> <p><i>A lehető legnagyobb négyzetek megtalálása 1-1 pont.</i></p>
<p>A ház négyzet alapjának oldalhosszát x-szel jelölve, Pitagorasz tétele szerint mindkét esetben</p> $(20 - x)^2 + x^2 = \frac{800}{3}.$	<p>1 pont</p>	
<p>A kijelölt műveletek elvégzése után a</p> $2x^2 - 40x + \frac{400}{3} = 0, \text{ azaz } x^2 - 20x + \frac{200}{3} = 0$ <p>egyenlethez jutunk.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Az egyenlet két pozitív megoldása:</p> $x = 10 + \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 15,77 \text{ és}$ $x = 10 - \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 4,23.$	<p>1 pont</p>	
<p>A konvex négyszög esetében $x > 20 - x$, azaz $x > 10$, így ekkor a négyzet oldala 15,77 m, ekkor a ház alapterülete: kb. 249 m² lenne.</p>	<p>1 pont</p>	<p><i>Ezek a pontok, akkor is járnak, ha indoklás nélkül adja meg egyik és másik esetben a négyzet oldalát, illetve területét.</i></p>
<p>A konkáv négyszög esetében $x < 20 - x$, azaz $x < 10$, így ekkor a négyzet oldala 4,23 m, ekkor a ház alapterülete: kb. 18 m² lenne.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Összesen:</p>	<p>7 pont</p>	

3. a)		
$\mathbf{a} \left(\cos \frac{5\pi}{6}; \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \mathbf{a} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right).$	1 pont	
$\mathbf{b} \left(\sin^2 \frac{5\pi}{6}; \cos^2 \frac{5\pi}{6} \right) = \mathbf{b} \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right).$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

3. b) első megoldás		
Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α -val. A koordinátaival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\mathbf{ab} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 - \sqrt{3}}{8},$	1 pont	
illetve $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos\alpha.$	1 pont	
Mivel $ \mathbf{a} = 1$ és $ \mathbf{b} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$	1 pont	
Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4} \cos\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{8},$ ebből $\cos\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} \approx 0,2005.$	1 pont	
Innen $\alpha \approx 78,43^\circ.$ Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78° -os szöget zár be.	1 pont	<i>Ezt a pontot csak akkor adjuk meg, ha a vizsgázó a kért szöget egészen kerekítve is megadja.</i>
Összesen:	5 pont	

3. b) második megoldás		
Az \mathbf{a} vektor az \mathbf{i} bázisvektor $+150^\circ$ -os elforgatottja.	1 pont	
A $\mathbf{b} \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right)$ vektor irányszöge β , $tg\beta = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$	2 pont	
Ebből $\beta \approx 71,57^\circ.$	1 pont	
Így a két vektor által bezárt α szögre $\alpha = 150^\circ - \beta \approx 78,43^\circ$ adódik. A két vektor tehát kb. 78° -os szöget zár be.	1 pont	<i>Ezt a pontot csak akkor adjuk meg, ha a vizsgázó a kért szöget egészen kerekítve is megadja.</i>
Összesen:	5 pont	

3. c)		
A két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha $\mathbf{ab} = 0$.	1 pont	
A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\mathbf{ab} = \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x$, így a $\cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x = 0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik: $\cos x \sin x (\sin x + \cos x) = 0$.	1 pont	
Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha $\cos x = 0$ vagy $\sin x = 0$ vagy $\sin x + \cos x = 0$.	1 pont	
(1) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ vagy	1 pont*	
(2) $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ vagy	1 pont*	
(3) $\sin x + \cos x = 0$. A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\operatorname{tg} x = -1$ egyenletével.	1 pont	
Azaz $x = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.	1 pont*	
A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $t = n \cdot \frac{\pi}{2}$ vagy $t = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, ahol $n, m \in \mathbf{Z}$.		<i>A megoldások összevont alakjának megadását nem várjuk el.</i>
Összesen:	7 pont	
<p>1. A *-gal jelölt pontok abban az esetben is járnak, ha a megoldásokat a vizsgázó fokban adja meg. Ha hiányzik, vagy rossz a periódus, ezek a pontok nem adhatók.</p> <p>2. A *-gal jelölt 3 pontból csak 1-et vonjunk le, ha az n, m és k lehetséges értékeire a vizsgázó nem ad utalást.</p> <p>3. Ha a vizsgázó elveszti az (1) vagy (2) alatti megoldásokat, a c) részre maximum 4 pontot kaphat.</p>		

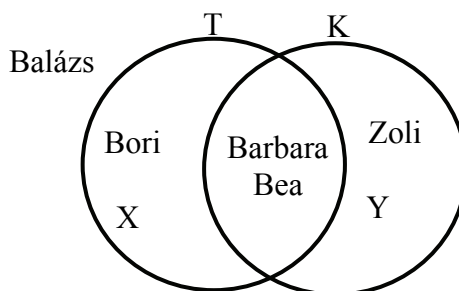
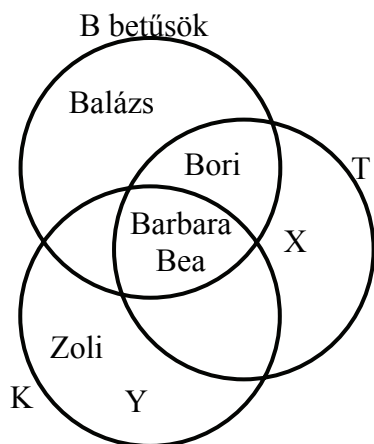
4. a)		
Felírva a hatodik elemeket az első elem és a kvóciens (q), illetve a differencia (d) segítségével kapjuk, hogy $q = -1$;	1 pont	
$d = -\frac{2}{5}$.	1 pont	
A mértani sorozat első öt eleme: $1; -1; 1; -1; 1$.	1 pont	
A számtani sorozat első öt eleme: $1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. b) első megoldás		
A mértani sorozat első n tagjának összege: $S_n = 1 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$	2 pont	<i>A képlet felírásáért 1 pont, a szétválasztásáért 1 pont.</i>
A számtani sorozat n -edik tagja: $b_n = 1 - \frac{2}{5}(n - 1)$.	1 pont	
A számtani sorozat első n tagjának összege: $s_n = \frac{2 - \frac{2}{5}(n - 1)}{2} \cdot n,$ azaz $s_n = \frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2$.	1 pont	
$s_n = 0$, azaz a $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív egész megoldása van, az $n = 6$.	2 pont	
$s_n = 1$, tehát $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 1$, azaz $n^2 - 6n + 5 = 0$ egyenlet megoldásai: $n = 1$ vagy $n = 5$.	2 pont	
Tehát a két sorozat első 1, vagy első 5, vagy első 6 tagjának összege ugyanakkora.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

4. b) második megoldás		
Az a) rész megoldása alapján észrevehető, hogy $S_1 = s_1$; azaz $n = 1$.	1 pont	
$S_5 = s_5$; azaz $n = 5$.	2 pont	
$S_6 = s_6$; azaz $n = 6$.	2 pont	
Az első hat tagnál több tag összege nem lehet egyenlő a két sorozatnál, mivel a számtani sorozat csökkenő (már a negyedik tag negatív), és az első hat tag összege 0.	2 pont	
Így $s_n < 0$, ha $6 < n$, ugyanakkor $S_n = 0$ vagy 1, tehát nem lehet $s_n = S_n$.	2 pont	
Összesen:	9 pont	

II.

5. a) első megoldás



Jelölje T a teniszezők, K a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.

A vizsgázó a halmazok Venn-diagramjába jól helyezi el Barbarát, Balázst, Beát, Borit.	1 pont	
Zoli elhelyezése.	1 pont	
A vizsgázó a T halmazban jól jelöl ki egy újabb családtagot;	1 pont	
a K halmazban is bejelöl egy újabb családtagot.	1 pont	
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van.	1 pont	<i>Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.</i>
Összesen:	5 pont	

5. a) második megoldás

Jelöljük B -vel a család azon tagjainak halmazát, akiknek a keresztnéve B betűvel kezdődik, T -vel a teniszezők, K -val a kerékpározók halmazát. A szöveg szerint: $B = \{\text{Barbara, Bea, Bori, Balázs}\}$. Balázs nem eleme T -nek és K -nak sem. $B \cap T \cap K = \{\text{Barbara, Bea}\}$. $T \cap K = \{\text{Barbara, Bea}\}$.	1 pont	
$\text{Bori} \in B \cap T$, és $\text{Zoli} \in K$.	1 pont	
$ T = K = 4$. Vagyis a T halmazban a három B betűs családtagon kívül van – a szövegben nem nevesített – családtag, jelöljük őt X -szel. $T = \{\text{Barbara, Bea, Bori, X}\}$.	1 pont	
A K halmazban is van még egy családtag a három – a szövegben is nevesített – családtagon kívül, jelöljük őt Y -nal: $K = \{\text{Barbara, Bea, Zoli, Y}\}$.	1 pont	
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van.	1 pont	<i>Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.</i>
Összesen:	5 pont	

5. b)		
A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak.	1 pont	
Minden számjegy 2-féleképpen választható meg, tehát $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ilyen különböző háromjegyű szám van.	1 pont	
Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5. c)		
A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1, 3, 5 és 7-es számú székeken, vagy a 2, 4, 6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül le.	1 pont	
Az első esetben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs 4!-féleképpen helyezkedhet el.	1 pont	
Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén 4!-féleképpen foglalhat helyet.	1 pont	
Így az első esetben a 8 embernek $4! \cdot 4! (= 576)$ -féle ülésrendje alakulhat ki.	1 pont	
A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen $2 \cdot 4! \cdot 4! (= 1152)$ ülésrendje alakulhat ki.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. d)		
A 8 ember összes ülésrendjének száma: $8! (= 40320)$.	1 pont	
Mivel bármelyik ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség: $p = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35} (\approx 0,0286).$	2 pont	<i>Ha a c) rész rossz eredményével jól számol, akkor is jár a 2 pont.</i>
Összesen:	3 pont	

6. a)		
A 12 liter 10%-os ecet tömény tartalma: 1,2 liter; a 8 liter 15%-os eceté is 1,2 liter, az 5 liter 20%-os eceté pedig 1 liter.	1 pont	
Az összeöntés utáni 25 liter keverékben a tömény ecet: 3,4 liter.	1 pont	
Ezért a keverék $\frac{3,4}{25} = \frac{13,6}{100} = 13,6\%$ -os.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

6. b)		
Ha a palackban a tömény ecet mennyisége a , a tiszta vize b (liter), Kázmér kalkulációja alapján egy palack ára: $1,2 \cdot (500a + 10b + 30)$ forint, ami	2 pont	
a 10%-os palack esetében $1,2 \cdot (500 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,9 + 30) \approx 107$ Ft;	1 pont	
a 15%-os palack esetében $1,2 \cdot (500 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,85 + 30) \approx 136$ Ft;	1 pont	
a 20%-os palack esetében $1,2 \cdot (500 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,8 + 30) \approx 166$ Ft.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

6. c)		
Kázmér kalkulációja alapján a kereskedelmi árrés nélkül megállapított árak a 10%-os palack esetében 120 Ft, a 15%-os palackra 125 Ft a 20%-ra pedig 130 Ft.	2 pont	
Jelölje a palack árát forintban p , a tömény ecet literjének árát t és a víz literjének árát v . Felírhatók az alábbi egyenletek: (1) $p + 0,1 \cdot t + 0,9 \cdot v = 120$ (2) $p + 0,15 \cdot t + 0,85 \cdot v = 125$ (3) $p + 0,2 \cdot t + 0,8 \cdot v = 130$	2 pont	<i>Két helyes egyenlet felírásáért 1 pont jár.</i>
A (2)-(1) egyenletekből kaphatjuk, hogy: $0,05 \cdot t - 0,05 \cdot v = 5$ (vagy pl. $t - v = 100$).	1 pont	
Ugyanezt az összefüggést kaphatjuk a (3)-(2) egyenletekből is.	1 pont	
A három egyenlet tehát nem független egymástól. A p , t és v egyértelmű értékének megállapítása ezekből az adatokból nem lehetséges.	2 pont	<i>Ha a helyes következtetés levonása elmarad, ez a 2 pont nem jár.</i>
Összesen:	8 pont	
<i>Ha megad két olyan pozitív számokból álló különböző számhármast, amelyből ezek az árak kalkulálhatók és ezt be is mutatja, akkor is jár a teljes pontszám.</i>		

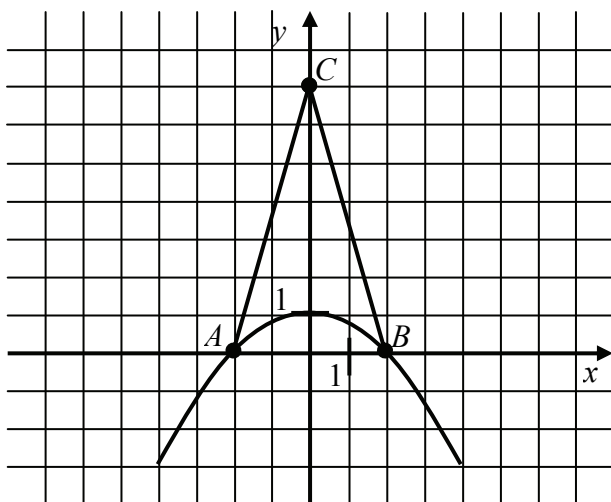
7. a) első megoldás		
Ha a 8 fős társaság minden tagja mindenkivel beszélt volna egy alkalommal, akkor $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ telefonbeszélgetést folytattak volna le csütörtökön.	2 pont	
Az azonos nemzetiségűek egymással nem beszéltek, tehát a három német összesen 3-mal kevesebb,	1 pont	
míg a négy magyar meghívott összesen $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ -tal kevesebb beszélgetést folytatott le.	1 pont	
Mindezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $28 - (3 + 6) = 19$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

7. a) második megoldás		
A házigazda 7 beszélgetést folytatott.	1 pont	
Mind a 3 német vendég 5-5 alkalommal telefonált, mert a 2 német társával nem beszélt.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat nem ennyire részletező, és pl. csak egy rajzban fókuszálként jelenik meg</i>
Mind a 4 magyar meghívott 4-4 beszélgetést folytatott, mert 3 magyar társával nem beszélt.	1 pont	
Az egyénekenként összeszámolt beszélgetések összege a társaság beszélgetései számának kétszerese, mert minden beszélgetést 2-2 emberrel számoltunk meg.	1 pont	
Mindezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $\frac{7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{2} = \frac{38}{2} = 19$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

7. b)		
Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak.	1 pont	
Mivel egymástól függetlenül döntöttek, annak a valószínűsége, hogy mindenki elmegy $p^7 = 0,028$.	2 pont	
Innen $p = \sqrt[7]{0,028} \approx 0,600$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el: $1 - p$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: $(1 - p)^7 (\approx 0,4^7 \approx 0,0016)$.	2 pont	
Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy elmegy $1 - (1 - p)^7$,	2 pont	
ami közelítőleg 0,998.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

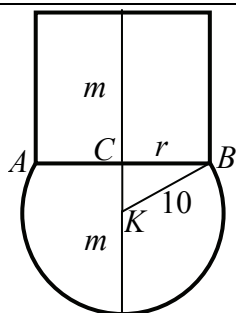
8. a)		
A keresett két csúc rajta van a C középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2 + (y - 7)^2 = 53$.	1 pont	
A keresett pontokat a következő egyenletrendszer megoldása adja: $\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \\ x^2 + (y - 7)^2 = 53 \end{array} \right\}$	1 pont	
Az első egyenlet átalakításával: $x^2 = -4y + 4$. Az x^2 kifejezését behelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk, hogy $y^2 - 18y = 0$.	1 pont	
Innen $y_1 = 0$ és $y_2 = 18$.	1 pont	
Ezek közül csak az $y_1 = 0$ ad megoldást.	1 pont	
Behelyettesítve az első egyenletbe: $x^2 = 4$. Innen $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. A keresett két pont: $A(-2; 0)$ és $B(2; 0)$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	
8. b)		
A BC egyenes egyenlete: $7x + 2y = 14$.	1 pont	<i>Az AC egyenes egyenlete</i> $7x - 2y = -14$.
A D pont koordinátáit a $7x + 2y = 14$ és a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ görbék B-től különböző metszéspontjai adják.	1 pont	
$7x - \frac{1}{2}x^2 = 12$ gyökei: $x_1 = 2$; $x_2 = 12$.	1 pont	$7x + \frac{1}{2}x^2 = -12$ $x_1 = -2$; $x_2 = -12$.
$D(12; -35)$.	1 pont	$D(-12; -35)$
Összesen:	4 pont	

8. c)



Az ABC háromszög területe: $\frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$.	1 pont	
A parabola két készre osztja a háromszöget.	1 pont	<i>Ha a gondolatot jól használja, jár a pont.</i>
A kisebbik rész területének fele a szimmetria miatt: $\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx = \frac{4}{3}$.	2 pont	
A háromszögnek a parabolaív alá eső területe: $\frac{8}{3}$ (területegység).	1 pont	
A háromszögnek a parabolaív fölé eső területe: $14 - \frac{8}{3} = \frac{34}{3} (\approx 11,33)$ (területegység).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

9.



A KBC derékszögű háromszög befogóinak hossza $m - 10$ és r , átfogója 10 cm.	2 pont													
Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a KBC háromszögre: $(m - 10)^2 + r^2 = 100$	2 pont													
Ebből $r^2 = 20m - m^2$.	1 pont													
A váza térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2) + r^2 \pi m$.	1 pont													
A váza térfogata m függvényében: $V(m) = \frac{\pi}{6} m \cdot [3(20m - m^2) + m^2] + \pi(20m - m^2)m$,	2 pont													
azaz $V(m) = \pi \left(-\frac{4}{3} m^3 + 30m^2 \right) = \frac{2\pi}{3} (45m^2 - 2m^3)$,	1 pont													
ahol $10 < m < 20$.	1 pont													
A V függvény differenciálható a $]10;20[$ nyílt intervallumon, s a deriváltja: $V'(m) = \pi(-4m^2 + 60m) = 4\pi(15 - m)m$ A $]10;20[$ nyílt intervallumon $V'(m) = 0$ pontosan akkor, ha $m = 15$.	2 pont													
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>$10 < m < 15$</td> <td>$m = 15$</td> <td>$15 < m < 20$</td> </tr> <tr> <td>$V'(m)$</td> <td>pozitív</td> <td>$= 0$</td> <td>negatív</td> </tr> <tr> <td>V</td> <td>Szigorúan növekvő</td> <td>Helyi maximum</td> <td>Szigorúan csökkenő</td> </tr> </table>		$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m < 20$	$V'(m)$	pozitív	$= 0$	negatív	V	Szigorúan növekvő	Helyi maximum	Szigorúan csökkenő	3 pont	
	$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m < 20$											
$V'(m)$	pozitív	$= 0$	negatív											
V	Szigorúan növekvő	Helyi maximum	Szigorúan csökkenő											
Az $m = 15$ a V függvény abszolút maximum helye is, így ekkor lesz a váza térfogata a lehető legnagyobb. ($V_{\max} = 2250\pi \approx 7069 \text{ (cm}^3\text{)}$)	1 pont													
Összesen:	16 pont													